

## **Практическая работа: Применение теоремы о трех перпендикулярах**

**Цель работы:** сформировать умение применять теорему о трех перпендикулярах при решении простейших стереометрических задач.

Выполнив данную работу, Вы будете:

**знать:**

- теорему о трех перпендикулярах и теорему обратную ей;

**уметь:**

- изображать на рисунках и конструировать на моделях перпендикуляры и наклонные к плоскости;
- решать задач на вычисление геометрических величин.

**Дидактическое оснащение:**

- указания по выполнению практического задания;
- рабочая тетрадь с конспектами;
- чертежные инструменты (набор линеек, простые карандаши);
- учебное пособие к разделу № 3 «Прямые и плоскости в пространстве».

Прежде чем приступить к выполнению заданий практической работы ответьте на вопросы входного контроля.

### **Входной контроль**

Прочитайте каждое утверждение. Если утверждение верное, поставьте «+», иначе «-».

1. Если две прямые в пространстве перпендикулярны третьей, то они параллельны между собой.
2. Если прямая перпендикулярна плоскости, то она перпендикулярна лежащим в этой плоскости двум сторонам треугольника.
3. Если прямая  $a$  параллельна плоскости  $\alpha$  и прямая  $b$  перпендикулярна прямой  $a$ , то прямая  $b$  перпендикулярна плоскости  $\alpha$ .
4. Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум сторонам квадрата, который принадлежит плоскости.
5. Если прямая  $a$  перпендикулярна плоскости  $\alpha$ , а прямая  $b$  не перпендикулярна плоскости  $\alpha$ , то  $a$  параллельна  $b$ .
6. Прямая перпендикулярна плоскости треугольника, если она перпендикулярна двум его сторонам.
7. Две стороны треугольника могут быть перпендикулярны одной плоскости одновременно.
8. Две стороны трапеции могут быть перпендикулярны одной плоскости одновременно.
9. Прямая, которая пересекает круг в центре и перпендикулярна его диаметру, перпендикулярна плоскости круга.
10. Прямая, которая пересекает круг в центре и перпендикулярна двум его радиусам (Не образующим диаметр), перпендикулярна плоскости круга.

### **Нормы оценивания**

За каждый правильный ответ Вы получаете 1 балл. Максимальное количество баллов – 10. Если Вы набрали более 7 баллов, то можете переходить к изучению нового материала, в противном случае необходимо повторить материал предыдущих занятий, который Вами не освоен в достаточной мере.

## Порядок выполнения практической работы

1. Прочитайте краткое изложение теории и ознакомьтесь с образцами решения типовых задач.
2. Ответьте на контрольные вопросы.
3. Выполните самостоятельно задания практического занятия.
4. Сравните полученные результаты с эталонами ответов.

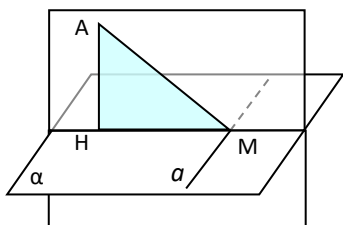


Рис. 1

### Теорема о трёх перпендикулярах

АН – перпендикуляр (расстояние от точки А до плоскости  $\alpha$ )

АМ – наклонная.

НМ – проекция наклонной АМ.

$\angle A$  - угол между наклонной АМ и перпендикуляром НМ.

$\angle M$  - угол между наклонной АМ и ее проекцией на плоскость (угол между наклонной и плоскостью).

**Теорема о трех перпендикулярах.** Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной (рис. 1).

*Символьная запись к теореме о трех перпендикулярах*  $a \perp HM \Rightarrow a \perp AM$

Справедлива также **обратная теорема**:

**Теорема (обратная теорема о трех перпендикулярах).** Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции (рис. 1).

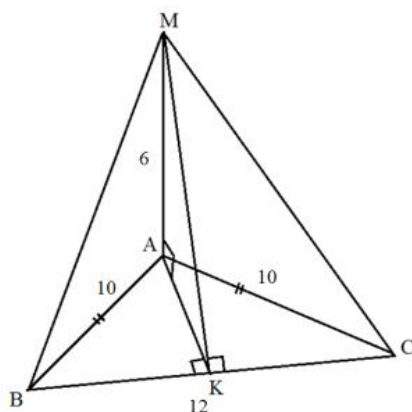
*Символьная запись к обратной теореме о трех перпендикулярах*  
 $a \perp AM \Rightarrow a \perp HM$

## Решения типовых задач

**Каждое действие решения геометрической задачи выполняется в несколько этапов:**

- 1) рассматривается простейшая геометрическая фигура (определяется ее тип и объясняется ее описание);
- 2) выбирается способ (формула) вычисления неизвестной величины;
- 3) производятся вычисления (подстановки);
- 4) записывается ответ.

**В случае если неизвестное не удалось найти за эти 4 этапа, действия нумеруются и выполняются до конечного ответа.**



**Задача 1.** Отрезок АМ перпендикулярен плоскости треугольника АВС и имеет длину 6 см. Найдите расстояние от точки М до прямой ВС, если АВ = АС = 10 см, С=12 см.

Дано:  $\Delta ABC$  - равнобедренный, т.к.  $AB = AC = 10$  см

АМ – перпендикуляр,  $AM \perp (ABC)$ ,  $AM = 6$  см

$BC = 12$  см.

Найти: МК.

Решение.

1) Рассмотрим  $\triangle MAK$  - прямоугольный, т.к.  $AM$  – перпендикуляр,  $AM \perp (ABC)$ .

$MK$  – можно назвать наклонной к плоскости  $\triangle MAK$ , а  $AK$  ее проекцией на эту плоскость.

По теореме Пифагора:  $MK^2 = AM^2 + AK^2$ ,  $AM = 6$ ,  $AK = ?$

2) Рассмотрим  $\triangle ABC$  - равнобедренный, т.к. по условию  $AB = AC = 10$  см.

Определим чем является  $AK$  для  $\triangle ABC$ . Так как по условию задачи  $MK$  – расстояние от точки  $M$  до прямой  $BC$  (т.е. проводится перпендикулярно к этой прямой), то по обратной теореме о трех перпендикулярах:

если  $MK \perp BC$ , то  $AK \perp BC \Rightarrow AK$  - высота в  $\triangle ABC$ .

Так как  $\triangle ABC$  – равнобедренный, то  $AK$  не только высота, но и медиана

$$\Rightarrow BK = KC = \frac{12}{2} = 6.$$

3) Рассмотрим  $\triangle АКВ$  – прямоугольный (т.к.  $AK$  – высота)

$AB = 10$  см (по условию),  $BK = 6$  (из 2 п. решения).

По теореме Пифагора:  $AK^2 = AB^2 - BK^2$

$$AK^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$$

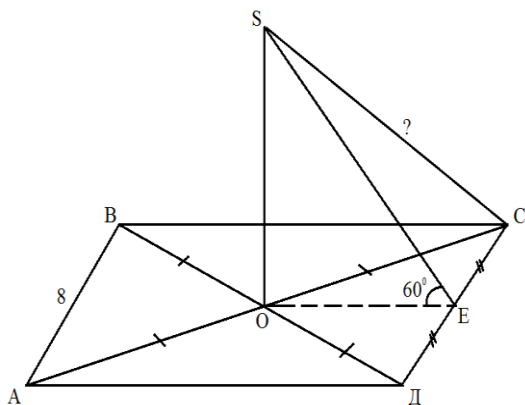
Т.к.  $AK > 0$ , то  $AK = \sqrt{64} = 8$  см.

Вернемся в 1 п. решения:  $MK^2 = AM^2 + AK^2$

$$MK^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

Т.к.  $MK > 0$ , то  $MK = \sqrt{100} = 10$  см.

Ответ: 10 см



$AB = 8$  см,  $\angle SEO = 60^\circ$ .

Найти:  $SC$ .

Решение.

1) Рассмотрим  $\triangle ADC$  - прямоугольный, равнобедренный (т.к. по условию  $ABCD$  – квадрат, значит,  $AD = DC = 8$ ,  $\angle ADC = 90^\circ$ ). Так как  $AO = OC$  (по свойству диагоналей квадрата) и  $DE = EC$  (по условию задачи), то  $OE$  – средняя линия  $\triangle ADC$

$$\Rightarrow OE = \frac{AD}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ (по свойству средней линии треугольника)}^2.$$

**Задача 2.** Из точки  $O$  пересечения диагоналей<sup>1</sup> квадрата  $ABCD$  к его плоскости проведен перпендикуляр  $SO$  и точка  $S$  соединена с серединой стороны  $DC$  (рис. 2). Найдите длину отрезка  $SC$ , если  $AB = 8$  см,  $\angle SEO = 60^\circ$ .

Дано:  $ABCD$  – квадрат,

$AC$  и  $BD$  – диагонали квадрата,

$O$  – точка пересечения диагоналей.

$SO$  – перпендикуляр,  $SO \perp (ABC)$ .

$E$  – середина  $DC$  (т.е.  $DE = EC$ )

<sup>1</sup> В квадрате точка пересечения диагоналей делит их пополам.

<sup>2</sup> Средняя линия треугольника равна половине его основания.

2) Рассмотрим  $\triangle SOE$  - прямоугольный (т.к. по условию  $SO \perp (ABC) \Rightarrow SO \perp OE$ ). Так как по условию задачи  $\angle SEO = 60^\circ$ , то  $\angle OSE = 180^\circ - (90^\circ - 60^\circ) = 30^\circ$ . Так как катет, лежащий против этого угла равен половине гипотенузы, а гипотенуза в два раза больше этого катета, то получаем, что  $SE = 2 \cdot OE = 2 \cdot 4 = 8$  см.

3) Рассмотрим  $\triangle SEC$  и определим его тип:

Так как в равнобедренном  $\triangle COD$  ( $OD = OC$  по условию задачи)  $OE$  является медианой ( $E$  - середина стороны  $CD$  по условию задачи), то  $OE$  - высота<sup>3</sup>, следовательно,  $OE \perp CD$ .

Так как для  $\triangle SOE$  отрезок  $OE$  - является проекцией наклонной  $SE$  на плоскость квадрата, то по теореме о трех перпендикулярах следует, что  $CD \perp SE$ , а, следовательно,  $\triangle SEC$  - прямоугольный, в котором известно, что  $EC = 4$  см (по условию задачи  $DE = EC = \frac{CD}{2} = \frac{8}{2} = 4$ ),  $SE = 8$  см (из 2 пункта решения).

По теореме Пифагора  $SC^2 = SE^2 + EC^2$

$$SC^2 = 8^2 + 4^2 = 64 + 16 = 80, \text{ т.к. } SC > 0, \text{ то } SC = \sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5} \text{ см.}$$

Ответ:  $4\sqrt{5}$  см.

### Контрольные вопросы

1.  $AB$  - перпендикуляр к плоскости,  $AC$  - наклонная,  $BC$  - её проекция на плоскость,  $CD$  - прямая на плоскости, перпендикулярная прямой  $BC$ . Определите величину угла  $ACD$ .
2.  $AB$  - перпендикуляр к плоскости,  $AC$  - наклонная,  $BC$  - её проекция на плоскость,  $CD$  - прямая на плоскости, перпендикулярная прямой  $AC$ . Определите величину угла  $B CD$ .

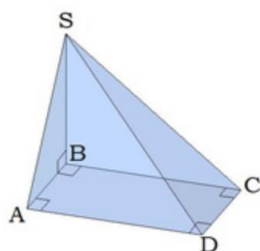


Рис. 2

3. Угол  $C$  треугольника  $ABC$  - прямой.  $AD$  - перпендикуляр к плоскости треугольника  $ABC$ . Определите тип  $\triangle BCD$ .

4. Из вершины  $S$  к плоскости квадрата  $ABCD$  проведен перпендикуляр  $BS$  и наклонные  $SA$ ,  $SC$  и  $SD$  (рис. 2). Назовите все прямоугольные треугольники с вершиной  $S$ . Ответ обоснуйте.

5. Из вершины  $A$  прямоугольного треугольника  $ABC$  (угол  $B$  - прямой) к плоскости треугольника проведен перпендикуляр  $AK$ . Определите взаимное расположение прямых  $KB$  и  $BC$ .

### Нормы оценивания

За каждый правильный ответ Вы получаете 1 балл. Максимальное количество баллов 5. Если Вы набрали более 3 баллов, то можете переходить к самостоятельному решению следующих задач, в противном случае необходимо повторить материал темы, который Вами не освоен в достаточной мере.

<sup>3</sup> В равнобедренном треугольнике медиана является и высотой, и биссектрисой.

### Задания практической работы

**Уровень А.** Из точки  $M$  проведен перпендикуляр к плоскости прямоугольника  $ABCD$  (рис. 3). Найдите расстояние от  $M$  до сторон прямоугольника  $ABCD$ , если известно, что  $MB = 6$  см,  $BC = 8$  см,  $AB = 4$  см.

**Уровень В.** Найдите расстояние от точки  $M$  до стороны  $CB$  прямоугольного треугольника  $ABC$ , если  $AM = BC = 5$  см,  $AC = 13$  см (рис. 4).

**Уровень С.** Из точки  $M$  проведен перпендикуляр к плоскости равнобедренного треугольника  $ABC$ . Найдите расстояние от  $M$  до стороны  $BC$ , если  $AM = 4$  см,  $AB = AC = 5$  см,  $BC = 8$  см (рис. 5).

### Дополнительное задание

**Задача.** Из  $M$  проведен перпендикуляр к плоскости прямоугольника  $ABCD$ . Найдите расстояние от точки  $M$  до сторон прямоугольника  $ABCD$ , если  $AB = 8$  см,  $BC = 6$  см,  $OM = 6$  см (рис. 6).

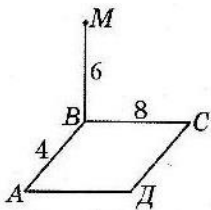


Рис. 3

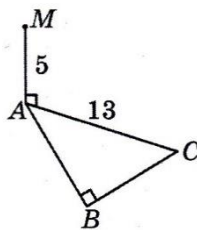


Рис. 4

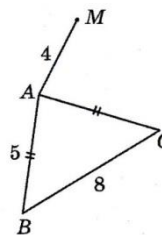


Рис. 5

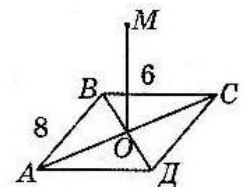


Рис. 6

### Эталоны ответов

#### Ответы на вопросы входного контроля

1. +
2. +
3. -
4. -
5. -
6. +
7. -
8. +
9. -
10. +

#### Ответы на контрольные вопросы

1.  $90^0$ .
2.  $90^0$ .
3. Прямоугольный.
4.  $\Delta SBA$  и  $\Delta SBC$  прямоугольные, т.к.  $BS$  – перпендикуляр к плоскости;  $\Delta SCD$  и  $\Delta SAD$  прямоугольные (по теореме о трех перпендикулярах).
5. Прямые  $KB$  и  $BC$  взаимно перпендикулярны.

#### Ответы на задания практической работы

Уровень А.  $10\text{см}$ ,  $2\sqrt{13}\text{см}$ .

Уровень В.  $13\text{см}$ .

Уровень С.  $5\text{см}$ .

#### Ответы на дополнительное задание

Задача.  $3\sqrt{5}\text{см}$ ,  $2\sqrt{13}\text{см}$ .